

## О ДЕФОРМАЦИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*Л.А. Карамшина*

С.-Петербургский государственный университет

Аспирант, L\_karamshina@mail.ru

### 1. Введение

Внешняя оболочка глаза состоит из плотной наружной фиброзной оболочки — склеры, средней сосудистой оболочки — хориоидеи, и самой тонкой и мягкой внутренней оболочки — сетчатки.

Склеральная и фиброзная оболочки близки по своей структуре к трансверсально-изотропной ткани: характеризуются более низким модулем упругости в направлении своей толщины (в радиальном направлении), чем в продольном и поперечном [1],[2]. Как показали исследования, модуль Юнга склеры в радиальном направлении в среднем 0,5 МПа, тогда как в продольном и поперечном направлениях этот показатель меняется в пределах 3–40 МПа. Модуль Юнга хориоидеи в радиальном направлении составляет 193,1 КПа, в продольном и поперечном — 477,2 КПа [1]. Особенность сосудистой оболочки заключается в том, что она относится к "активным" структурам глаза [3]: изменяя свой объем и жесткость в зависимости от кровенаполнения она способна изменять свои механические свойства в течение суток.

Сетчатка является непрочной тканью толщиной 250 мк, которая характеризуется относительно низким модулем Юнга — 20 КПа [1].

В данной работе построено решение задачи о деформации тонкой упругой сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев, под действием внутреннего и внешнего давления. Каждый слой представляет собой трансверсально-изотропную сферическую оболочку с различными биомеханическими свойствами.

### 2. Постановка задачи

Предполагается, что внешний слой оболочки является более жестким и отвечает биомеханическим характеристикам склеры, а внутренний слой — более мягким и отвечает биомеханическим свойствам хориоидеи (сосудистой оболочке глаза).

Обозначим  $R_1$ ,  $R_3$  — внутренний и внешний радиусы оболочки,  $R_2$  — радиус зоны контакта ее слоев ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). Пусть  $p_1$ ,  $p_3$  — величины внутреннего и внешнего давления,  $p_2$  — давление, действующие в зоне контакта слоев.

Из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат  $(\rho, \varphi, \theta)$  справедливы равенства [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= \sigma_{\rho\rho}^i(\rho), & \sigma_{\theta\theta}^i &= \sigma_{\varphi\varphi}^i(\rho), & \sigma_{\rho\theta}^i &= \sigma_{\rho\varphi}^i = \sigma_{\theta\varphi}^i = 0, \\ u_\rho^i &= u_\rho^i(\rho), & u_\theta^i &= u_\varphi^i = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $i = 1$  соответствует внутреннему, а  $i = 2$  — внешнему слою.

Предполагая, что имеет место жесткий контакт, запишем условия сопряжения оболочек

$$\sigma_{\rho\rho}^1 = \sigma_{\rho\rho}^2, \quad u_\rho^1 = u_\rho^2 \quad \text{при} \quad \rho = R_2. \quad (2)$$

Для каждого слоя оболочки имеем уравнения равновесия [4]

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}^i}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(2\sigma_{\rho\rho}^i - \sigma_{\theta\theta}^i - \sigma_{\varphi\varphi}^i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Деформации имеют вид

$$E_{\rho\rho}^i = \frac{du_\rho^i}{d\rho}, \quad E_{\theta\theta}^i = \frac{u_\rho^i}{\rho}, \quad E_{\varphi\varphi}^i = \frac{u_\rho^i}{\rho}, \quad (4)$$

$$E_{\rho\theta}^i = E_{\rho\varphi}^i = E_{\theta\varphi}^i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для трансверсально-изотропных слоев оболочки имеют место соотношения [5]

$$\begin{aligned} E_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{E_i} (\sigma_{\theta\theta}^i - \nu_i \sigma_{\varphi\varphi}^i) - \frac{\nu_i'}{E_i'} \sigma_{\rho\rho}^i, \\ E_{\varphi\varphi}^i &= \frac{1}{E_i} (\sigma_{\varphi\varphi}^i - \nu_i \sigma_{\theta\theta}^i) - \frac{\nu_i'}{E_i'} \sigma_{\rho\rho}^i, \\ E_{\rho\rho}^i &= -\frac{\nu_i'}{E_i'} (\sigma_{\theta\theta}^i + \sigma_{\varphi\varphi}^i) + \frac{1}{E_i} \sigma_{\rho\rho}^i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_i$  и  $E_i'$  — соответственно модули Юнга при растяжении-сжатии на поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном ней;  $\nu_i$  и  $\nu_i'$  — коэффициенты Пуассона.

Упругие коэффициенты трансверсально-изотропного тела удовлетворяют системе неравенств [5]

$$|\nu_i'| < (E_i'/E_i)^{1/2}, \quad -1 < \nu_i < 1 - 2(\nu_i')^2(E_i/E_i') \quad (E_i > 0, E_i' > 0). \quad (6)$$

Введем следующие обозначения

$$\eta_i = \nu_i' \frac{E_i}{E_i'}, \quad \xi_i = \frac{\nu_i - 1}{2\nu_i'^2}, \quad \gamma_i = \frac{1 - \nu_i'}{\nu_i'^2}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Тогда, учитывая соотношения (4) и (5), выражения для напряжений принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= \frac{1}{\eta_i + \xi_i} \left( \xi_i E_i' \frac{du_\rho^i}{d\rho} - E_i \frac{u_\rho^i}{\rho} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= -\frac{1}{2(\eta_i + \xi_i)} \left( \frac{du_\rho^i}{d\rho} + \frac{1}{\nu_i'} \frac{u_\rho^i}{\rho} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя равенства (8) в уравнения (3), получаем уравнения равновесия в перемещениях для каждого слоя оболочки

$$\xi_i \frac{d^2 u_\rho^i}{d\rho^2} + 2\xi_i \frac{1}{\rho} \frac{du_\rho^i}{d\rho} + \gamma_i \eta_i \frac{u_\rho^i}{\rho^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Решения уравнений (9) при  $u^i = u^i(\rho)$  имеют вид

$$u^i = a_i \rho^{\alpha_i} + b_i \rho^{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — новые постоянные, а  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  определяются соотношениями

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\gamma_i \eta_i}{\xi_i}} \right), \quad \beta_i = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\gamma_i \eta_i}{\xi_i}} \right), \quad i = 1, 2.$$

Из соотношений (10) и (8), получаем следующие выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= a_i (\gamma_i \alpha_i - \delta_i) \rho_i^{\alpha_i-1} + b_i (\gamma_i \beta_i - \delta_i) \rho_i^{\beta_i-1}, \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= a_i (\chi_i \alpha_i + \zeta_i) \rho_i^{\alpha_i-1} + b_i (\chi_i \beta_i + \zeta_i) \rho_i^{\beta_i-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\gamma_i = \frac{\xi_i E_i'}{\eta_i + \xi_i}, \quad \delta_i = \frac{E_i}{\eta_i + \xi_i}, \quad \chi_i = -\frac{1}{2} \delta_i, \quad \zeta_i = \frac{\chi_i}{\nu_i'}, \quad i = 1, 2.$$

Постоянные  $a_i$  и  $b_i$  определяются из граничных условий на лицевых поверхностях внутренней и внешней оболочек глаза, а именно

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^1 &= -p_1 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \\ \sigma_{\rho\rho}^1 &= -p_2 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \sigma_{\rho\rho}^2 &= -p_2 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \sigma_{\rho\rho}^2 &= -p_3 \quad \text{при} \quad \rho = R_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_2$  - неизвестное усилие взаимодействия между оболочками.

Величина  $p_2$  определяется из условия сопряжения оболочек по перемещениям

$$u^1(\rho) = u^2(\rho) \quad \text{при} \quad \rho = R_2. \quad (13)$$

Подставляя соотношения (12) в равенства (11), получаем

$$a_i = \frac{R_i (\psi_i^{\beta_i-1} p_{i+1} - p_i)}{R_{i+1}^{\alpha_i} (\gamma_i \alpha_i - \delta_i) (\psi_i^{\alpha_i} - \psi_i^{\beta_i})}, \quad b_i = \frac{R_i (p_i - \psi_i^{\alpha_i-1} p_{i+1})}{R_{i+1}^{\beta_i} (\gamma_i \beta_i - \delta_i) (\psi_i^{\alpha_i} - \psi_i^{\beta_i})}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

где  $\psi_1 = R_1/R_2$ ,  $\psi_2 = R_2/R_3$ .

Из соотношений (10), (14) и условия сопряжения (13) определяется давление, действующее в зоне контакта сосудистой и склеральной оболочек глаза

$$p_2 = \frac{(M_1 R_2^{\beta_1} - N_1 R_2^{\alpha_1}) p_1 + (M_2 R_2^{\beta_2} - N_2 R_2^{\alpha_2}) p_2}{M_2 R_2^{\beta_2} - N_2 R_2^{\alpha_2} + M_1 R_2^{\beta_1} \psi_1^{\alpha_1-1} - N_1 R_2^{\alpha_1} \psi_1^{\beta_1-1}}, \quad (15)$$

где

$$N_i = \frac{R_i}{R_{i+1}^{\alpha_i} (\gamma_i \alpha_i - \delta_i) (\psi_i^{\alpha_i} - \psi_i^{\beta_i})}, \quad M_i = \frac{R_i}{R_{i+1}^{\beta_i} (\gamma_i \beta_i - \delta_i) (\psi_i^{\alpha_i} - \psi_i^{\beta_i})}, \quad i = 1, 2.$$

Перемещения и напряжения полностью определяются с помощью формул (10), (11), (14) и (15).

В предлагаемой модели, за счет разности упругих коэффициентов сосудистой и склеральной оболочек, на поверхности контакта наблюдается разрыв продольных и поперечных напряжений. В реальности, с изменением внутриглазного давления возможно проскальзывание между оболочками, которое возникает из-за неравномерности напряжений на поверхности. В связи с этим, на поверхности контакта, вводятся дополнительные условия

$$\sigma_{\theta\theta}^1(\rho) = \omega \sigma_{\theta\theta}^2(\rho), \quad \text{при} \quad \rho = R_2. \quad (16)$$

где  $\omega$  — вспомогательный коэффициент, позволяющий оценить влияние разности упругих коэффициентов оболочек  $E_i, E'_i, \nu_i, \nu'_i, i = 1, 2$  на разность значений продольных и поперечных напряжений на поверхности контакта.

Коэффициент  $\omega$  определяется из условия (16)

$$\omega = \frac{a_1(\gamma_1^k \alpha_1 + \delta_1^k) R_2^{\alpha_1 - 1} + b_1(\gamma_1^k \beta_1 + \delta_1^k) R_2^{\beta_1 - 1}}{a_2(\gamma_2^k \alpha_2 + \delta_2^k) R_2^{\alpha_2 - 1} + b_2(\gamma_2^k \beta_2 + \delta_2^k) R_2^{\beta_2 - 1}} \quad (17)$$

### 3. Результаты расчетов

Из пяти упругих коэффициентов, необходимых для расчета трансверсально-изотропных сосудистой и склеральной оболочек глаза имеются экспериментальные данные только для модулей упругости и коэффициентов Пуассона в касательном направлении. На коэффициенты Пуассона  $\nu'_1, \nu'_2$  в направлении толщины оболочек, в виду отсутствия экспериментальных данных, накладываются только ограничения (6).

Расчеты проводились для следующего случая задания упругих коэффициентов:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.5 \text{ МПа}, & E'_1 &= \frac{E_1}{n_1}, & \nu_1 &= 0.45, & \nu'_1 &= \frac{\nu_1}{n_1}, \\ E_2 &= 5.0 \text{ МПа}, & E'_2 &= \frac{E_2}{n_2}, & \nu_2 &= 0.45, & \nu'_2 &= \frac{\nu_2}{n_2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $E_1, E'_1, \nu_1, \nu'_1$  — упругие коэффициенты внутренней мягкой сосудистой оболочки,  $E_2, E'_2, \nu_2, \nu'_2$  — упругие коэффициенты внешней, более жесткой склеральной оболочки.

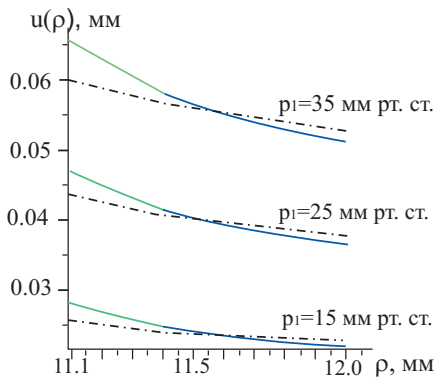


Рис.1. Зависимости для перемещений внутренней и внешней оболочек глаза

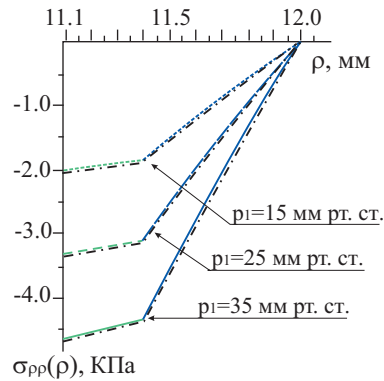


Рис.2. Зависимости для радиальных напряжений внутренней и внешней оболочек глаза

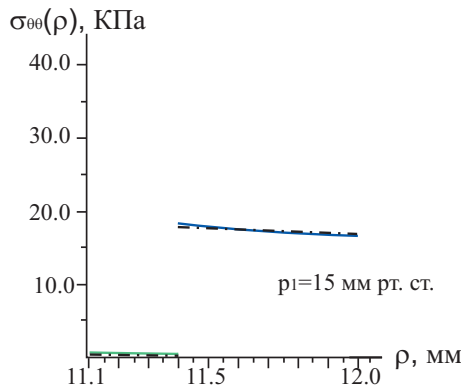


Рис.3.1. Зависимости для тангенциальных напряжений для  $p_1 = 15$  мм рт. ст.

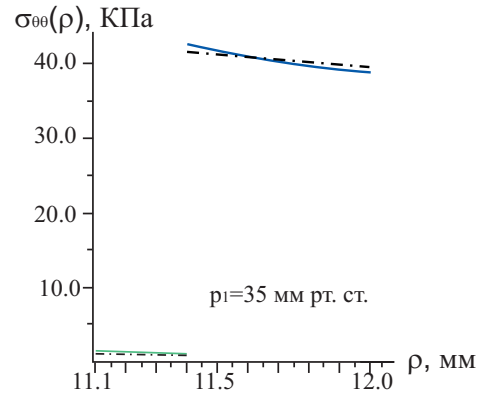


Рис.3.2. Зависимости для тангенциальных напряжений для  $p_1 = 35$  мм рт. ст.

На рис.1 - рис.3 приведены зависимости перемещений и напряжений для внутренней сосудистой  $\rho = [11.1; 11.4]$  и внешней склеральной  $\rho = [11.4; 12.0]$  оболочек глаза для внутриглазного давления 15, 25, 35 мм рт. ст. при  $n_1 = 2.5$ ,  $n_2 = 10$ . Пунктирными линиями обозначены соответствующие перемещения и напряжения оболочек для случая  $n_1 = n_2 = 1$  при тех же значениях внутреннего давления глаза.

Как отмечалось ранее, сосудистая оболочка относится к "активным" элементам глаза и способна изменять свои биомеханические свойства, за счет кровенаполнения, в течение суток [1]. На рис. 4 - рис.6 приведены зависимости перемещений и напряжений при увеличении модулей упругости сосудистой оболочки в три раза под действием внутриглазного давления 25 мм. рт. ст. при следующих значениях упругих коэффициентов

$$\begin{aligned} E_1 \in [0.5; 1] \text{ МПа}, \quad E'_1 = \frac{E_1}{n_1}, \quad \nu_1 = 0.45, \quad \nu'_1 = \frac{\nu_1}{n_1}, \quad n_1 = 2.5, \\ E_2 = 5.0 \text{ МПа}, \quad E'_2 = \frac{E_2}{n_2}, \quad \nu_2 = 0.45, \quad \nu'_2 = \frac{\nu_2}{n_2}, \quad n_2 = 10. \end{aligned} \quad (19)$$

Толщина оболочек после деформации определяется как разность  $\Delta_i = R_{i+1} + u_{i+1}(R_{i+1}) - R_i - u_i(R_i)$ ,  $i = 1, 2$ . В табл. 1 представлены результаты вычислений изменения толщины сосудистой и склеральной оболочек глаза при внутриглазном давлении 25 мм. рт. ст.

Таблица 1

Модуль Юнга сосудистой оболочки $E_1$ , МПа	Хориоидея		Склера	
	Толщина $h_i$ , мм	Изменение толщины, %	Толщина $h_i$ , мм	Изменение толщины, %
0.5	0,295	1,8	0,5947	0,88
0.75	0,296	1,4	0,5948	0,86
1.0	0,297	1,2	0,5950	0,84

Для мягкой сосудистой оболочки характерны большие радиальные смещения и большие относительные изменения толщины, чем для жесткой склеральной оболочки при том же значении внутреннего давления.

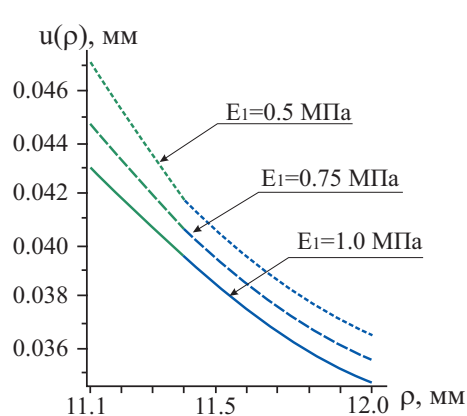


Рис.4. Зависимости для перемещений при увеличении  $E_1$  и  $E'_1$  в 3 раза

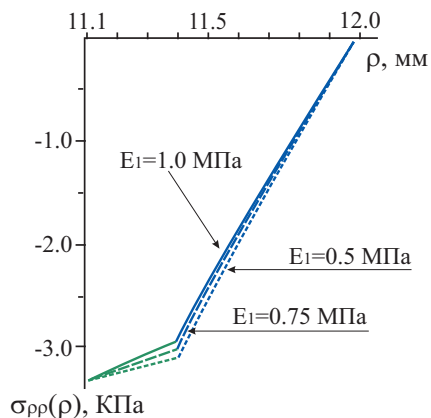


Рис.5. Зависимости для радиальных напряжений при увеличении  $E_1$  и  $E'_1$  в 3 раза

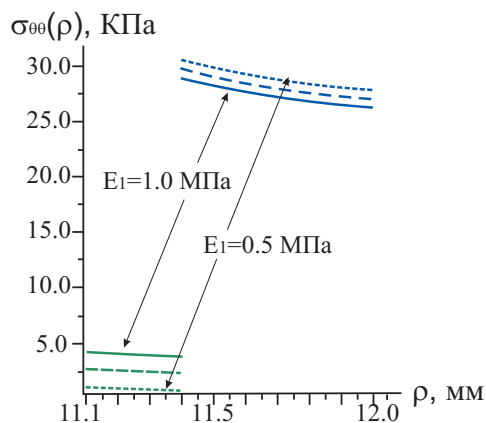


Рис.6. Зависимости для тангенциальных напряжений

#### 4. Выводы

При более низких значениях модулей упругости сосудистой оболочки глаза  $E_1$  и  $E'_1$  при одном значении внутриглазного давления наблюдаются большие радиальные смещения и более сильные изломы перемещений и напряжений.

Введение дополнительного коэффициента  $\omega$  позволяет учесть возможность проскальзывания между оболочками, возникающего из-за неравномерного распределения напряжений на поверхности сопряжения при изменении внутриглазного давления.

Проведенные расчеты показали, что чем больше разность упругих коэффициентов оболочек на поверхности изотропии материала и в направлении, перпендикулярном к ней, тем сильнее возникают изломы перемещений и напряжений на поверхности контакта.

Полученные результаты позволяют оценить влияние упругих характеристик сосудистой и склеральной оболочек глаза на возможное развитие отслоек хориоидеи.

## Список литературы

- [1] *Иомдина Е.Н.* Механические свойства тканей глаза человека.// Современные проблемы биомеханики, вып.11. Изд-во МГУ, 2006, с. 183-200.
- [2] *Саулгозис Ю.Ж.* Особенности деформирования склеры//Механика композитных материалов, 1981, 3, с.505-514.
- [3] *Полоз М.В., Иомдина Е.Н.* Активные деформации человеческого глаза// Биомеханика-2010, X Всероссийская конференция, тезисы докладов. Изд-во Саратовского университета, с.137-139.
- [4] *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М: Гостехиздат, 1955, 492 с.
- [5] *Радионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та., 1996, 278 с.